

Esame di Controlli Automatici - 12 Gennaio 2017

- Q1** Si discutano i vantaggi ed i limiti delle tecniche di controllo in azione diretta (feedforward) e in retroazione (feedback), e le loro combinazioni.
- A1** Il controllo in feedforward di sistemi dinamici richiede una pianificazione accurata della sequenza di ingressi da applicare, i quali sono eseguiti come sequenza temporale precalcolata. La pianificazione può essere effettuata con tecniche di ottimizzazione analitiche o (più frequentemente) numeriche, e risultano pertanto molto efficienti rispetto all'indice che si desidera ottimizzare (ad es. un costo da minimizzare), riuscendo anche a gestire vincoli sui valori degli ingressi o degli stati ammissibili. Sono d'altronde prone ad errori anche molto grandi nel caso di inaccuratezza del modello, di variazioni delle condizioni iniziali, o di presenza di disturbi. Il controllo in retroazione può invece essere molto più robusto rispetto a questi fattori, anche se introduce una forte dipendenza dalla accuratezza del modello dei sensori utilizzati e dal rumore di misura. Inoltre, il controllo in retroazione può risultare meno efficiente rispetto ai valori di indici di costo come l'energia spesa nel controllo, e generare (se non opportunamente corretto) valori inaccettabilmente alti delle variabili di controllo e/o degli stati del sistema. Nella pratica, le due tecniche vengono spesso adottate contemporaneamente, applicando una moderata azione di controllo in retroazione attorno ai movimenti e agli ingressi pianificati ottimizzando la prestazione in feedforward.
- Q2** Si scrivano le condizioni nelle quali per un sistema LTITD con matrici (A, B, C, D) , lo stato x_F può essere raggiunto a partire dallo stato x_0 .
- A2** $x_F \in \mathbb{R}^n$ è raggiungibile in k passi da x_0 se $\text{rank} [x_F - A^k x_0 \mid R_k] = \text{rank} R_k$, dove R_k la matrice di raggiungibilità del sistema. Se non è raggiungibile in $k = n$ passi, non è raggiungibile per nessun k . Se $\text{rank} R_k = n$, qualsiasi x_F è raggiungibile da qualsiasi x_0 .
- Q3** Il test di rango della matrice di raggiungibilità di un sistema LTITD dà una risposta qualitativa (si/no) sulla raggiungibilità o meno di un sistema. Come si può dare invece una risposta di tipo quantitativo, associando a sistemi diversi diverse misure di raggiungibilità?
- A3** Una misura della maggiore o minore difficoltà per un sistema di raggiungere punti qualsiasi nello spazio di stato è data dal minimo valore singolare $\underline{\sigma}$ della matrice di raggiungibilità R . Tanto minore è $\underline{\sigma}$, tanto maggiore è la difficoltà a raggiungere alcuni stati; quando $\underline{\sigma} = 0$, il raggiungimento di qualche stato diventa impossibile, il sistema perde raggiungibilità e R perde rango. Per spiegare il ruolo di $\underline{\sigma}$, si consideri per semplicità il caso $x_0 = 0$, dove vale $x_F = RU$. Per confrontare le sequenze di controllo al variare delle posizioni finali, si può usare la somma dei valori quadrati ad ogni istante, ovvero $U^T U$, e dividerla per la distanza del punto raggiunto, anch'essa misurata dalla somma dei quadrati delle componenti $x_F^T x_F$. Si ha quindi un costo normalizzato

$$C(U) = \frac{U^T U}{x_F^T x_F} = \frac{U^T U}{U^T R^T R U},$$

Le sequenze U che massimizzano questo costo sono quelle allineate con l'autovettore associato all'autovalore minimo di $R^T R$. La radice quadrata di questo autovalore è il "valore singolare minimo" di R , che indichiamo con $\underline{\sigma}$. Il costo del controllo, nel peggior caso, è quindi $C = 1/\underline{\sigma}^2$, e tende ad infinito quando $\underline{\sigma}$ tende a zero, ovvero quando si perde raggiungibilità.

- Q4** Si ricavi l'equazione di Lyapunov per sistemi LTITD e se ne discuta l'esistenza e unicità delle soluzioni.
- A4** Per il sistema $x^+ = Ax$ si ipotizza l'esistenza di una funzione di Lyapunov quadratica nella forma $V = x^T P x$ per la quale si abbia $\Delta V = x^T A^T P A x - x^T P x = -x^T Q x$, con Q p.d. data, da cui l'equazione di Lyapunov TD $A^T P A - P = -Q$. Questa equazione è lineare nei valori di P , ed ha tante equazioni quante incognite. Se A ha tutti modi asintoticamente convergenti a zero, la matrice $P = \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k Q A^k$ esiste e ne è una soluzione per qualunque A e Q , per cui è anche soluzione unica. Se A ha modi divergenti, la soluzione non esiste, mentre se A ha modi tutti non divergenti, ma qualcuno non convergente, la soluzione esiste solo per alcune Q e non è unica.

Q5 Si consideri un sistema nonlineare instabile. Si supponga che il controllore $C(s)$ sia in grado di stabilizzarne globalmente il modello ottenuto per approssimazione lineare attorno ad un equilibrio. Su quali basi e in quali condizioni possiamo affermare che, se lo stesso controllore è applicato al sistema nonlineare originale, anche questo è stabilizzato?

A5 Il risultato è garantito dal teorema indiretto di Lyapunov, che garantisce che, se il sistema costituito da modello linearizzato e controllore è asintoticamente stabile, lo è anche il sistema originale connesso al controllore. Ovviamente la stabilizzazione è garantita solo localmente per il sistema originale.

Q6 Si consideri, come nel punto precedente, un sistema nonlineare instabile ed un controllore lineare che ne stabilizza l'approssimazione lineare. È possibile ottenere una stima dell'insieme delle condizioni iniziali del sistema nonlineare originale a partire dalle quali il sistema controllato converge al punto di equilibrio, sapendo che le condizioni iniziali del controllore sono nulle? È possibile ottenere una stima dell'insieme delle condizioni iniziali del sistema nonlineare originale a partire dalle quali il sistema controllato converge al punto di equilibrio, senza fare alcuna ipotesi sulle condizioni iniziali del controllore?

A6 Una stima per difetto della regione di asintotica stabilità si ottiene applicando il teorema dell'Insieme Invariante Massimo nello spazio di stato del sistema ottenuto per composizione del sistema originale e dal controllore. Utilizzando come candidata una funzione quadratica costruita sulla base della soluzione della equazione di Lyapunov per il linearizzato del sistema composto, siamo sicuri che esiste una regione contenuta in una sua curva di livello tutta interna alla regione in cui la derivata della candidata è negativa definita anche per il sistema composto nonlineare. Questa regione è una stima per difetto della RAS nello spazio completo. Se sappiamo che le condizioni iniziali del controllore sono nulle, la sezione di questa regione è una stima per difetto di quanto richiesto. Se le condizioni iniziali del controllore non sono specificate, invece, nulla si può dire sulla convergenza delle traiettorie.

Q7 Si consideri il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -u x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1. \end{cases}$$

Si studi la stabilità di tale sistema nell'origine per ogni valore costante di $u \in \mathbb{R}$. Si traccino inoltre qualitativamente le traiettorie nello spazio di stato a partire dalla condizione iniziale $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ al variare del medesimo parametro.

Si proponga infine una legge di feedback $u(x)$ in grado di stabilizzare il sistema nell'origine.

A7 Per u costante il sistema dinamico si riconduce ad un semplice sistema lineare autonomo nella forma

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -u \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui

$$\det[\lambda I - A] = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -u.$$

Da ciò è possibile concludere che

- $\forall u > 0$ il sistema è semplicemente stabile, con modi propri oscillatori.
- $\forall u \leq 0$ il sistema è instabile con modi $e^{-\sqrt{u}t}$, $e^{\sqrt{u}t}$.

In Fig. 1 sono riportate le traiettorie al variare di u (la freccia tratteggiata indica valori di u crescenti).

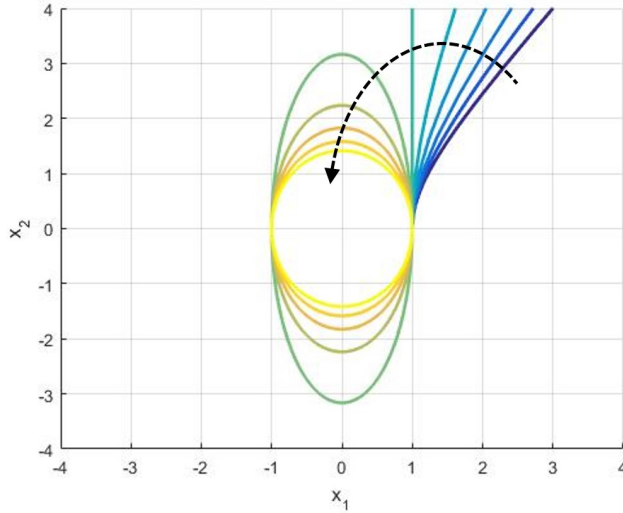


Figura 1: Traittorie al variare del parametro u .

Il design del feedback stabilizzante è ottenuto a partire dalla candidata di Lyapunov $V(x) = \frac{x^T x}{2} > 0$ da cui,

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T x = -u x_2 x_1 + x_1 x_2 = (-u + 1) x_1 x_2.$$

Scegliendo $u(x) = 1 + x_1 x_2$ si ottiene

$$\dot{V}(x) = -(x_1 x_2)^2.$$

Questo ci assicura che il sistema chiuso in retroazione converga al luogo U tale che $x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow \{x_1 = 0 \vee x_2 = 0\}$. Per il Teorema dell'Invariante Massimo la convergenza nell'origine è subito dimostrata notando che per $\forall x \in U \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ l'evoluzione dello stato non rimane costantemente in U .

$$\begin{aligned} \{x_1 = 0 \wedge x_2 \neq 0\} &\Rightarrow \dot{x}_1 = -x_2, \\ \{x_1 \neq 0 \wedge x_2 = 0\} &\Rightarrow \dot{x}_2 = x_1. \end{aligned}$$

Q8 Si considerino i due sistemi rappresentati dalle f.d.t

$$G_1 = \frac{s+1}{(s+5)}, G_2 = \frac{s+5}{(s+3)(s+7)}$$

e se ne scriva una realizzazione minima nello spazio di stato.

A8 Una rappresentazione minima si ottiene scrivendo la forma canonica di controllo. Per il sistema G_1 essa corrisponde a

$$A_1 = [5], B_1 = [1], C_1 = [4], D_1 = [1].$$

Notare che D_1 differisce da zero dato che il sistema non è strettamente proprio.

Per quanto riguarda il sistema $G_2(s)$, procediamo prima a riscriverlo come:

$$G_2 = \frac{s+5}{s^2+10s+21}.$$

A questo la forma canonica di controllo risulta essere:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -21 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_2 = [5 \quad 1], D_2 = [0].$$

Q9 Si considerino i sistemi di cui al punto precedente, connessi come in figura 2. Si indichino, per i tre casi, gli autovalori dei quattro sottosistemi della decomposizione di Kalman.

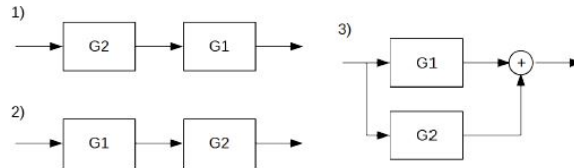


Figura 2: Possibili schemi di connessione.

A9 Si hanno i seguenti casi:

- Caso 1 $Y(s) = G_1(s)G_2(s)U(s)$:
In questo caso uno zero della funzione di trasferimento a monte G_2 cancella un polo della funzione di trasferimento a valle G_1 causando una perdita di raggiungibilità. Questo implica che i sottoblocchi della forma di Kalman saranno:

$$\lambda_{co} = \{-3, -7\}, \lambda_{\bar{c}o} = \{-5\}, \lambda_{c\bar{o}} = \emptyset, \lambda_{\bar{c}\bar{o}} = \emptyset.$$

- Caso 2 $Y(s) = G_2(s)G_1(s)U(s)$:
In questo caso opposto al precedente, uno polo della funzione di trasferimento a monte cancella uno zero della funzione di trasferimento a valle causando una perdita di osservabilità. I sottoblocchi della forma di Kalman saranno perciò:

$$\lambda_{co} = \{-3, -7\}, \lambda_{\bar{c}o} = \emptyset, \lambda_{c\bar{o}} = \{-5\}, \lambda_{\bar{c}\bar{o}} = \emptyset.$$

- Caso 3 $Y(s) = (G_1(s) + G_2(s))U(s)$:
Dato che gli autovalori corrispondenti ai modi dei sistemi rappresentati da G_1 e G_2 sono distinti, non avvengono cancellazioni nel sistema risultante dal parallelo dei due, perciò i sottoblocchi della forma di Kalman sono:

$$\lambda_{co} = \{-3, -5, -7\}, \lambda_{\bar{c}o} = \emptyset, \lambda_{c\bar{o}} = \emptyset, \lambda_{\bar{c}\bar{o}} = \emptyset.$$

Q10 Dato il sistema definito dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1], D = [0].$$

si trovi una retroazione degli stati che alloca gli autovalori del sistema in anello chiuso in $-5, -10$.

A10 Il sistema può essere scritto in forma di funzione di trasferimento come

$$G = \frac{s + 2}{s^2 + 10s}.$$

Da G si costruisce la forma canonica di controllo che corrisponde a

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_c = [2 \quad 1], D_c = [0].$$

Si noti che questa rappresentazione del sistema utilizza uno stato x_c diverso dallo stato originale x . Il polinomio caratteristico desiderato ha la forma $p(\lambda) = \lambda^2 + 15\lambda + 50$, pertanto l'allocazione desiderata si ottiene retroazionando lo stato x_c nell'ingresso u , tramite la matrice

$$K_c = [5 \ 50] .$$

Dato che lo stato x e lo stato x_c sono legati dalla relazione $x = Tx_c$, la stessa allocazione dei poli si ottiene, per il sistema originario, tramite la matrice di retroazione $K = K_c T$. Essendo il sistema, completamente osservabile e raggiungibile, la matrice T è ottenibile ricorrendo alla relazione $R_c = TR$ e quindi $T = R_c R^{-1}$. Nel caso in esame abbiamo

$$R_c = [B_c \ A_c B_c] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 12 \end{bmatrix} , \quad R = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$$

da cui

$$T = R_c R^{-1} = \begin{bmatrix} -20 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} , \quad K = K_c T = [0 \ 60]$$

Q11 Dato il sistema del punto precedente, si progetti un osservatore che ne ricostruisca asintoticamente lo stato a partire dalle misura dell'uscita e dell'ingresso. Si allochino i poli dell'osservatore opportunamente per poterlo utilizzare per la retroazione del punto precedente.

A11 Si noti che il sistema è già scritto in forma canonica di osservabilità ed è quindi completamente osservabile. Si può ricostruire lo stato con un sistema osservatore espresso nella forma

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + L(y - C\tilde{x}) = (A - LC)\tilde{x} + Bu + Ly .$$

Una buona regola per l'allocazione dei poli dell'osservatore è quella di assegnare una parte reale pari ad almeno il doppio di quella assegnata agli autovalori del sistema controllato. Ciò si traduce, nel sistema in questione, nel desiderare che i poli dell'osservatore siano in $\{-10, -20\}$.

Il polinomio caratteristico desiderato ha quindi la forma $p(\lambda) = \lambda^2 + 30\lambda + 200$. La matrice L che alloca i poli dell'osservatore di conseguenza è

$$L = [20 \ 200] .$$