

Modi

Matrici e relativi modi:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, e^{-2t}$$

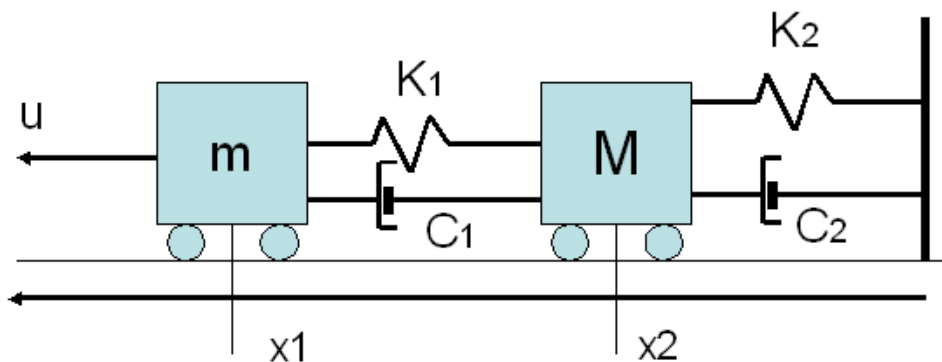
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, e^{-2t}, te^{-2t}$$

$$\begin{pmatrix} -2+i & 0 \\ 0 & -2-i \end{pmatrix}, e^{(-2+i)t} = e^{-2t}(\cos(t) + i \sin(t))$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix},$$

MODI.m

Trasformate di Laplace



siano $m = 1Kg$, $M = 19Kg$ le masse, $K_1 = 10^3 N/m$, $K_2 = 410^2 N/m$ le elasticità, $C_1 = 10 Nsec/m$ e $C_2 = 19 Nsec/m$ i coefficienti di smorzamento viscoso.

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -K_1(x_1 - x_2) - C_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + u \\ M\ddot{x}_2 = K_1(x_1 - x_2) + C_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - K_2x_2 - C_2\dot{x}_2. \end{cases}$$

Se trasformiamo entrambe le equazioni della dinamica nel dominio della variabile complessa s , e supponiamo il sistema inizialmente rilassato, otteniamo:

$$\begin{cases} ms^2 X_1 = -K_1(X_1 - X_2) - C_1(sX_1 - sX_2) + U \\ Ms^2 X_2 = K_1(X_1 - X_2) + C_1(sX_1 - sX_2) - C_2sX_2 - K_2X_2. \end{cases}$$

Ricavando X_2 dalla seconda equazione e sostituendolo nella prima e considerando come uscita $y = x_1$ si ottiene,

$$Y(s) = \frac{Ms^2 + (C_1 + C_2)s + (k_1 + k_2)}{mMs^4 + (C_1(m+M) + C_2m)s^3 + ((k_1 + k_2)m + C_2C_1 + Mk_1)s^2 + (C_2k_1 + k_2C_1)s + k_2k_1} U(s)$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene

$$Y(s) = \frac{(1400 + 29s + 19s^2)}{19s^4 + 219s^3 + 20590s^2 + 23000s + 400000} U(s)$$

Come varia $y(t)$ al variare dell'ingresso?

ESERCITAZIONE

Antitrasformate di Laplace

DISPENSE

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)^2} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+1} + \frac{c}{(s+1)^2}$$

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2+s+1)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{(s^2+s+1)}, \text{ NO!}$$

$$\mathcal{L}[e^{\sigma t} \sin(\omega t)] = \frac{\omega}{(s-\sigma)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{\sigma t} \cos(\omega t)] = \frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2 + \omega^2}$$

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2+s+1)} = \frac{a}{s} + \frac{b(s+\frac{1}{2})+c}{(s+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}},$$

$$F(s) \rightarrow f(t) = H(t) - e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

Altra tecnica (DISPENSE)

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)^2} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+1} + \frac{c}{(s+1)^2}$$

$$\begin{aligned}
 a &= sF(s)|_{s=0} = 2 \\
 c &= (s+1)^2 F(s)|_{s+1=0} = -1 \\
 b &= \frac{d}{ds}(s+1)^2 F(s)|_{s+1=0} = -2
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Altro esempio

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s-2)^3}$$

Antitrasformate Z

DISPENSE

$$\mathcal{Z} \left[\frac{t!}{p!(t-p)!} \lambda^{t-p} H(t) \right] = \frac{z}{(z-\lambda)^{p+1}}$$

$$F(z) = \frac{z-1}{(z+1)^2} = z \left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \frac{2}{(z+1)^2} \right)$$

$$\mathcal{Z} [\rho^t \sin(\theta t)] = \frac{\frac{z}{\rho} \sin \theta}{\left(\frac{z}{\rho}\right)^2 - 2 \left(\frac{z}{\rho}\right) \cos \theta + 1}$$

$$\mathcal{Z} [\rho^t \cos(\theta t)] = \frac{\left(\frac{z}{\rho}\right) \left(\frac{z}{\rho} - \cos \theta\right)}{\left(\frac{z}{\rho}\right)^2 - 2 \left(\frac{z}{\rho}\right) \cos \theta + 1}$$

$$F(z) = \frac{z+1}{z^2+4} \rightarrow f(t) = \frac{1}{4}\delta(t) - \frac{1}{4}2^t \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{1}{2}2^t \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

Antitrasformate e risposte ad ingressi?

Data $u(t)$ ingresso di un sistema vorrei conoscere $y(t)$, uscita del sistema.

Invece che fare prodotti di convoluzione si calcola la $G(s)$ del sistema e si L-trasforma l'ingresso. Sappiamo che $Y(s) = G(s)U(s)$, si calcola il prodotto e si antitrasforma $Y(s)$ con tecniche dei fratti semplici, in $y(t)$ compaiono i termini dovuti ai modi del sistema e i termini dovuti all'ingresso.

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + u \quad (2)$$

Considerando il vettore delle variabili di stato $z = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$ e come uscita la posizione della massa m si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} z \end{aligned} \quad (3)$$

MMS.m